Ускорение при криволинейном движении

Равномерное движение

Рассмотрим материальную точку, равномерно движущуюся по дуге радиуса R. При таком движении скорость точки, хотя и остается постоянной по модулю, тем не менее, меняется по направлению. Следовательно, даже при равномерном криволинейном движении точка будет обладать ускорением. Наша задача: определить модуль и направление этого ускорения.

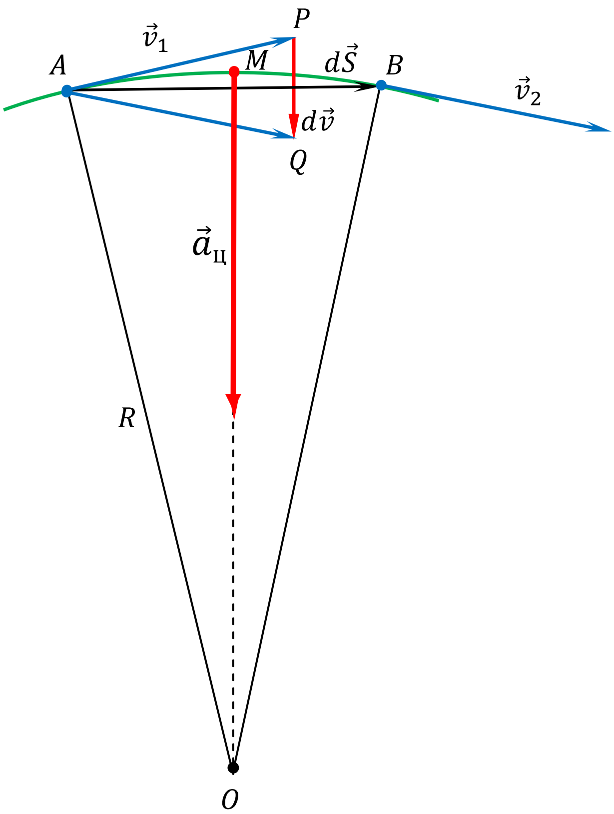

Рис. 1

Пусть нас интересует ускорение в точке M (рис. 1). Тогда возьмем пару точек A и B, в которых тело побывало соответственно чуть раньше и чуть позже, чем в M и построим вектор малого приращения мгновенной скорости $d\vec{v}$. Как видим, он направлен параллельно радиусу, проведенному в точку M. Следовательно

ускорение тела, равномерно движущегося по дуге окружности, в любой ее точке, направлено к центру этой окружности. Такое ускорение называется *центростремительным*

Модуль центростремительного ускорения можно определить следующим образом. Из подобия треугольников OAB и APQ следует пропорция:

$$\frac{|d\vec{v}|}{|d\vec{S}|} = \frac{v}{R} \qquad (1)$$

Помножим обе части (1) на $\frac{|d\vec{S}|}{dt} = v$. Получим

$$\frac{|d\vec{v}|}{dt} = \frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

Величина, находящаяся в левой части (2) — это и есть модуль ускорения. Таким образом.

Модуль центростремительного ускорения равен отношению квадрата скорости движения к радиусу дуги, по которой движется тело

$$\boldsymbol{a_{ц} = \frac{v^2}{R}} \qquad (3)$$

Центростремительное ускорение можно выразить также и через угловую скорость. Пользуясь формулой связи линейной и угловой скорости, $v = \omega R$, получим

$$a_{ц} = \omega^2 R. \qquad (4)$$

Произвольное движение

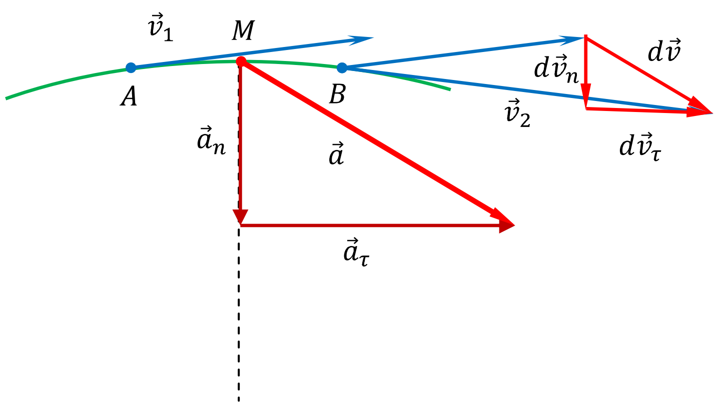

Рис. 2

В этом случае приращение скорости можно разложить на две составляющие $d\vec{v}_n$ и $d\vec{v}_\tau$, соответственно направленные перпендикулярно и по касательной к траектории (рис. 2):

$$d\vec{v} = d\vec{v}_n + d\vec{v}_\tau.$$

Тогда мгновенное ускорение в точке M

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} + \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}. \qquad (5)$$

Первое слагаемое в (5) называют *нормальным ускорением* оно обусловлено изменением направления скорости.

Действительно если бы $\vec{v}_1$и $\vec{v}_2$ совпадали по направлению, то $d\vec{v}_n$ равнялась бы нулю. Надо также учесть, что, чем ближе друг к другу будут взяты точки A и B, тем точнее мы определим мгновенное ускорение. А при достаточной близости этих точек $|d\vec{v}|$ окажется значительно меньшим самой мгновенной скорости (на рис 2 это явно не так, поскольку при выполнении условия $|d\vec{v}| \ll v$, рисунок был бы либо недостаточно наглядным, либо его пришлось бы сделать слишком большим). Но, как тогда легко видеть, нормальное ускорение совпадает с ранее найденным центростремительным ускорением. Если теперь ввести единичный вектор $\vec{n}$, направленный к центру кривизны траектории в данной точке, нормальное ускорение можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\vec{a}_n = \vec{n}\frac{v^2}{R}}. \qquad \mathbf{(6)}$$

Из рис. 2 также легко видеть, что

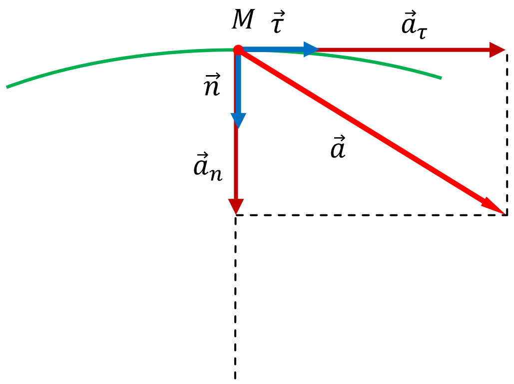

Рис. 3

второе слагаемое мгновенного ускорения (5) обусловлено изменением модуля скорости — оно называется *тангенциальным ускорением.*

Для удобства его представления введем единичный вектор $\vec{\tau}$, сонаправленный скорости в точке M. Тогда

$$\boldsymbol{\vec{a}_\tau = \vec{\tau}\frac{dv}{dt}}. \qquad \mathbf{(7)}$$

Таким образом,

при произвольном криволинейном движении точки ее полное мгновенное ускорение может быть представлено как сумма нормальной и тангенциальной составляющей, в соответствии с формулой:

$$\boldsymbol{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{n}\frac{v^2}{R} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}}. \qquad \mathbf{(8)}$$