Радианная мера угла поворота.
Угловая скорость. Связь линейной и угловой скорости.

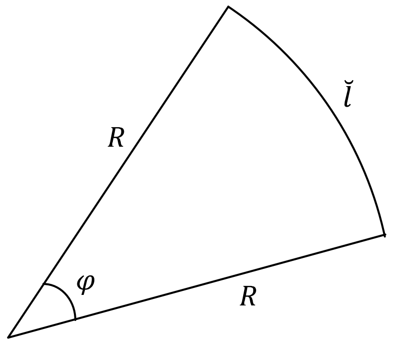

Рис. 1

***<u>Углом поворота точки, выраженным в радианах</u>*, называется отношение длины дуги этого поворота к радиусу поворота.**

$$\boldsymbol{\varphi_{рад} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\breve{l}}{R}} \qquad (1)$$

Можно выбрать направление, при движении в котором угол будем считать положительным, а в противном случае — отрицательным. Тогда угол поворота может быть любым действительным числом.

Уместно поставить вопрос: действительно ли (1) определяет величину угла? Ведь, если ни радиус, ни дуга, взятые по отдельности, никак не характеризуют угол, то почему их отношение дает такую характеристику? Ответ на поставленный вопрос ясен из рис. 2 и 3. В силу подобия секторов, изображенных на рис 2,

$$\frac{\breve{l}_2}{R_2} = \frac{\breve{l}_1}{R_1} = \varphi.$$

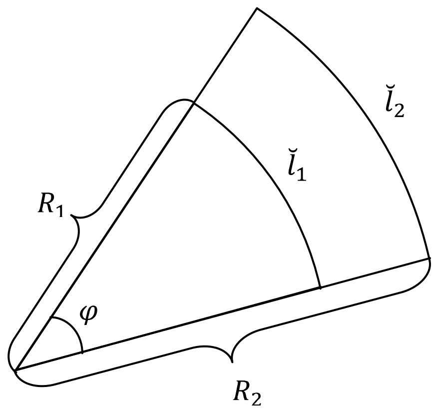

Рис. 2

Таким образом, при изменении радиуса и дуги, но сохранении угла, его радианная мера также сохраняется. С другой стороны, согласно рис 3,

$$\varphi_2 = \frac{2\breve{l}}{R} = 2\varphi_1$$

Таким образом, при изменении самого угла, его радианная мера меняется в то же число раз, что и сам угол. Отношение

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 2,$$

взято нами для примера, но интуитивно ясно, что пропорциональность радианной меры угла величине самого угла будет иметь место и при любом отношении углов. Читателей, заинтересованных в более формальном изложении этого вопроса, отошлем к соответствующему курсу геометрии.

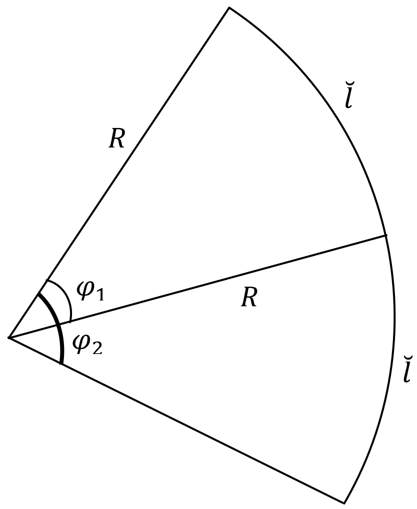

Рис. 3

Из определения (1) легко понять, почему полный оборот точки соответствует углу 2π. Действительно, в этом случае

$$\varphi_{рад}(360°) = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

В свою очередь

$$\varphi_{\text{рад}}(180°) = \frac{1}{2}\varphi_{\text{рад}}(360°) = \pi,$$

Аналогично можно разобраться с остальными углами, часто используемыми в задачах по геометрии и физике. Имеет смысл, однако, получить общую формулу связи радианной меры угла с его градусной мерой. Идея ее заключается в том, что, поскольку обе меры характеризуют угол количественно, то должен существовать переводной коэффициент, единый для всех углов. В таком случае достаточно найти его для какого-либо одного угла, скажем, для развернутого. Таким образом, имеет место пропорция:

$$\frac{\varphi^\circ}{\varphi_{рад}} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad (2)$$

Но зачем вообще понадобилась радианная мера, коль скоро нам уже хорошо известна градусная? С тем же успехом, можно задать и встречный вопрос: а на каком основании была введена градусная мера? Ответ на него может нас удивить. По имеющимся историческим сведениям, градусная мера появилась в Древнем Вавилоне. Местные жрецы, они же — математики, считали, что, проходя свой дневной путь по небосводу, Солнце делает 180 шагов. Вот такая вот математика. Почему именно 180? На сей счет нет ясного мнения, а существующие не кажутся убедительными. Вот, например, что можно прочитать на эту тему в Интернете[1]:

> Шестидесятеричная система счисления была окончательно выработана вавилонянами, вероятно, в связи с измерением видимого кругового пути солнца по небу. Они высчитали, что если уложить вплотную по дневному пути солнца диски, равные солнечному, то их уложится 180, а всего за сутки – 360. Они выразили свое открытие в формуле: солнце за сутки делает по своему кругу 360 шагов. Это деление они стали применять ко всякому кругу; оно было заимствовано римлянами и усвоено последующей европейской геометрией – деление круга на 360 градусов (латинское слово «градус» – шаг).

Если отвлечься от имеющихся в тексте грамматических ошибок, то идея интересная. К сожалению, она никак не согласуется с астрономическими данными. Действительно, угловой диаметр Солнца составляет чуть больше 0,5°, а не 1°, как того требовалось бы для выкладывания видимого пути Солнца по небу 180 солнечными дисками, вплотную прижатыми друг к дружке.

Мы сделали столь пространный экскурс в историю градусной меры для того, чтобы показать, насколько искусственна она с точки зрения современной физики. Кажущееся удобство ее использования – не более чем привычка. Радианная мера, наоборот, никак не связана с наивной метафизикой, поэтому является куда более естественной. В полной мере удобство радианной меры проявится в связи с понятием угловой скорости, к определению которой мы и переходим.

Угловой скоростью точки **называется отношение угла этого поворота, выраженного в радианах, ко времени поворота:**

$$\boldsymbol{\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{\varphi_{рад}}{t}} \qquad (3)$$

Линейной (путевой) скоростью точки **называется отношение пройденного ею пути ко времени прохождения этого пути:**

$$\boldsymbol{v \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{t}} \qquad (4)$$

[1] Ссылка: http://student.km.ru/ref_show_frame.asp?id=850B66B8774A42B59A2C1589C15441CF

Получим формулу, связывающую линейную скорость точки с ее угловой скоростью. При движении по окружности путь равен длине пройденной дуги ($L = \breve{l}$) тогда, используя (3) и (1), получим:

$$\omega = \frac{\varphi_{рад}}{t} = \frac{\breve{l}/R}{t} = \frac{L/t}{R} = \frac{v}{R}$$

Отсюда

$$\boldsymbol{v = \omega R} \qquad (5)$$

Это и есть искомая формула.

Если бы при определении угловой скорости мы использовали бы не радианную, а градусную меру угла, то, как нетрудно убедиться, правая часть (5) содержала бы коэффициент $\frac{\pi}{180°}$. На этом простом примере, мы видим, что градусная мера в данном случае является гораздо мене удобной. Из всех возможных мер угла только радианная мера не дает дополнительных коэффициентов при переводе угловых величин в линейные. Это свойство радианной меры делает ее выделенной среди остальных, благодаря чему она активно используется в современной физике.