Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа

Согласно первому фундаментальному утверждению механики Лагранжа, состояние механической системы описывается некоторой функцией координат и времени — *функцией Лагранжа*:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n,, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n t), \tag{1}$$

или в краткой записи

$$L = L(q, \dot{q}, t), \tag{1, a}$$

Функция Лагранжа представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии системы.

Второе утверждение касается определенного интеграла функции Лагранжа по времени, называемого *действием*:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{2}$$

Согласно нему, при движении тел системы между положениями 1 и 2, функционал действия достигает своего минимума, так что его вариация обращается в нуль. В этом, собственно говоря, и состоит *принцип наименьшего действия.*

Кто-нибудь понял? Может, стоит прочитать помедленнее? Можно читать медленнее, быстрее, вдоль и поперек — это не поможет. До конца понять данное утверждение затруднительно, поскольку не ясно каким образом определенный интеграл в результате движения системы может достигать минимума. Но ведь именно так, или примерно так, эта тема излагается в курсах теоретической физики, типа Ландау.

Между тем ситуация может быть прояснена и достаточно просто. Во-первых, определим *вариацию* аргументов функции Лагранжа и, следовательно, действия. Это некоторое воображаемые, *виртуальные,* приращения, любых координат и скоростей, при условии, что они не противоречат друг другу. Действительно между вариацией скорости и соответствующей ей координаты имеется очевидная зависимость:

$$\delta\dot{q} = \frac{dq(t)}{dt} - \frac{dq_0(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(q - q_0) = \frac{d}{dt}\delta q, \tag{3}$$

Здесь q_0 и q — координаты частицы, движущейся, соответственно, вдоль реальной и виртуальной траектории в момент времени t. Что же касается самих координат, то они могут быть связаны друг с другом в силу связей, соединяющих различные части системы.

Сообщим виртуальные приращения всем переменным, кроме времени, и составим *синхронное* приращение действия:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt. \tag{4}$$

Здесь t_1 и t_2 — моменты времени, в которые система занимает начальное и конечное положение, причем именно эти положения, а не моменты времени фиксированы. Первый порядок разложения функционала в ряд по степеням координат и скоростей называют *вариацией*. Необходимым условием минимума действия является обращения его вариации в нуль:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt = 0. \tag{5}$$

Учитывая (3) и интегрируя первое слагаемое по частям, получим:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q \Big|_{t_2}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0. \tag{6}$$

Но, так как граничные положения фиксированы, то проинтегрированное слагаемое обращается в нуль. В свою очередь в процессе интегрирования второй части вариации аргументов могут быть произвольными. Поэтому, оставшийся интеграл можно обратить в нуль только при равенстве нулю подынтегрального выражения для каждой материальной точки системы:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (7)$$

Соотношения (7) образуют систему *уравнений Лагранжа*, описывающих движение механической системы в выбранной системе *обобщенных* координат. Если координаты декартовы, то легко видеть, что она представляет собой второй закон Ньютона, записанный для каждой точки системы.

Обо всем этом, хотя и не так подробно, обычно говориться в учебниках. Но, лично у меня, такое изложение оставляет место для ряда вопросов.

Первый, и самый простой вопрос: а зачем это надо-то? Какая практическая польза от этой абстрактной игры ума? А надо это, оказывается, затем, что уравнения Лагранжа имеют один и тот же вид абсолютно в любой системе координат. Это легко видеть, мы ведь никак не конкретизировали, какими именно координатами будем описывать систему, именно поэтому они удостоились эпитета «обобщенные». Уравнения, обладающие подобным свойством, принято называть *ковариантными* относительно любых координатных преобразований. То есть мы можем использовать нужные нам координаты, а уравнения Лагранжа будут иметь тот же вид, что и второй закон Ньютона — удобно.

Но подобный ответ влечет за собой следующий вопрос. Позвольте, возразит дотошный читатель, второй закон Ньютона, во-первых, интуитивно очевиден, во-вторых, отлично проверен практически. А что касается уравнения Лагранжа, такого же по форме, но в любых координатах, то здесь не очевидно ни первое, ни второе. Короче говоря, где гарантия, что уравнения Лагранжа действительно ковариантны?

Существует два способа ответить на этот вопрос. Первый — это прямой переход от одних координат к другим. Если в результате этого перехода мы придем к уравнению того же вида, что и прежде, то ковариантность уравнений Лагранжа доказана. Процесс этот весьма трудоемкий, хотя осуществимый[1]. Второй путь основан как раз на принципе наименьшего действия, и он позволяет существенно сэкономить усилия, если прояснить кое-какой момент. К чему и приступим.

Для начала заметим, что в процессе получения уравнений Лагранжа, мы нигде не использовали условие именно минимума действия. Вполне достаточно чтобы соответствующее значение функционала было значением в стационарной точке. А, собственно говоря, точке чего? Вот тут-то и становится ясно, что с этим действием почти с самого начала было что-то не так. Некая величина достигает своего стационарного значения в точке пространства, которое мы никак не определили. Пора восполнить пробел.

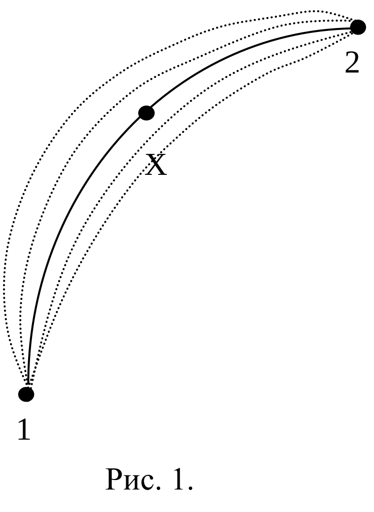

Рис. 1.

Рассмотрим всевозможные виртуальные траектории в n-мерном пространстве варьируемых декартовых координат системы. Каждой траекторий поставим в соответствие действительное число μ и зададим функцию $S(\mu)$, подбирая аргумент так, чтобы она оказалась гладкой. Дотошный математик непременно здесь усомнится, а действительно ли возможно так сделать? Да, возможно, в качестве алгоритма построения $S(\mu)$ возьмем,

[1] К примеру, в курсе теоретической механики И. М. Воронкова он занимает 7 страниц, со ссылкой на материал предыдущих параграфов.

например, следующий. Проведем сначала реальную траекторию, соединяющую две заданных точки. Варьировать координату в произвольной точке X будем следующим образом:

$$\delta q(X) = A\mu\, sin\frac{\pi l}{\lambda} \tag{8}$$

где A — постоянная, l — длина участка траектории от 1 до X, λ — вся ее длина. Это удовлетворяет граничным условиям. В свою очередь, ось μ проходит через точку X и как-то пересекает построенное семейство траекторий. Ясно, что при таком способе варьирования получим непрерывную, гладкую функцию, если только сама функция Лагранжа этими свойствами обладает. Если мы теперь снимем условие (8), то новых значений действия, в силу непрерывности S(μ), мы не получим. Поэтому каждой новой фазовой траектории можно присвоить аргумент μ, являющийся таковым для траектории с тем же значением действия.

Для *вариационной* производной S, по μ, очевидно, имеем:

$$\frac{\delta S}{d\mu} = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\delta q_i}{d\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\delta \dot{q}_i}{d\mu})dt = \sum_{i=1}^{n}\{\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\delta q_i}{d\mu}\Big|_{t_2}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\frac{\delta q_i}{d\mu}dt\} = 0 \tag{9}$$

Производная обращается в ноль, так как, вследствие второго закона Ньютона, тривиально каждое выражение в круглых скобках[2], а первая часть интеграла, как уже говорили, обнуляется по граничным условиям. Внесем теперь в алгоритм построения S(μ) одно дополнение. Пусть в новых переменных по закону (8) варьируется только одна координата и ее производная. На (9) это, очевидно никак не повлияет. Зато в новых переменных вид производной существенно упростится:

$$\frac{\delta S}{d\mu} = \int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\frac{\delta q_i'}{d\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i'}\frac{\delta \dot{q}_i'}{d\mu})dt = \int_{t_1}^{t_2}(\frac{\partial L}{\partial q_i'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i'})\frac{\delta q_i'}{d\mu}dt\} = 0 \tag{10}$$

Так как $\frac{\delta q_i'}{d\mu} \neq 0$, то должно обращаться в ноль именно выражение в скобках, а это и есть уравнение Лагранжа. Оно верно для всех координат, поскольку q_i' мы выбрали произвольно. Таким образом, исходя из второго закона Ньютона, через принцип наименьшего действия, мы снова приходим к системе уравнений Лагранжа, ковариантной относительно любых преобразований координат.

Таким образом, принцип наименьшего действия в механике — это, по сути дела, удобный способ доказать ковариантность системы уравнений Лагранжа. Между тем сегодня он в буквальном смысле овеян легендами. Некоторые физики склонны воспринимать ПНД с изрядной долей мистики, считая его чуть ли не очередным доказательством бытия Бога. Действительно, как косная материя «знает», при какой траектории интеграл действия будет минимальным. Более того, подобного рода вариационные принципы обнаруживаются и в других разделах физики. К примеру, в геометрической оптике аналог ПНД известен как принцип Ферма, причем сам Ферма как раз пришел к нему из телеологических соображений. Он полагал, что, поскольку природа чрезвычайно рачительна, то между двумя точками луч света должен двигаться так, чтобы затратить на это как можно меньше времени. Исходя из принципа Ферма, можно доказать прямолинейность распространения света в оптически однородной среде, а также получить известные законы отражения и преломления. Но как раз здесь легко привести пример, когда время движения луча отнюдь не максимально. К тому же между оптическим и механическим действием имеется тесная взаимосвязь. Так для свободной материальной точки интеграл действия равен

---

[2] Из него и принципа классического детерминизма ясно, что у S(μ) не может быть более одной стационарной точки, за исключением, разве что, движений из положения неустойчивого равновесия.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} K dt = K\Delta t, \qquad (11)$$

где К — кинетическая энергия частицы, а Δt — время движения, то есть оптическое действие. Но, так как $\Delta t = \lambda / v$, то

$$S = \frac{1}{2} p\lambda, \qquad (12)$$

где p — импульс, λ — путь. Ясно, что время движения фотона, как и действие для свободной частицы, будет наименьшим при движении между точками 1 и 2 по прямой.

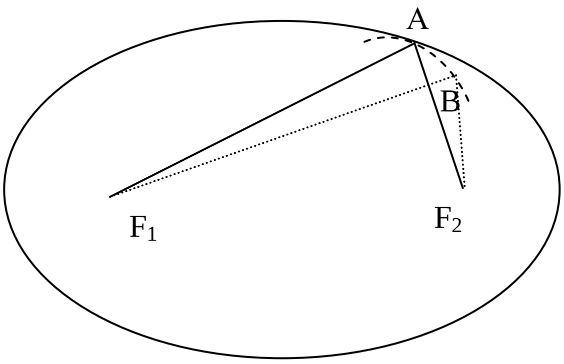

Рис. 2

Рассмотрим теперь оптико-механическое обобщение мысленных опытов, предлагаемых Д. В. Сивухиным. Испустим свободную частицу из фокуса эллипса. По основному свойству этой фигуры, она попадет в другой фокус, причем время полета, а, стало быть, действие не зависят от направления движения (в точке А фотон испытывает отражение, а шарик абсолютно-упругий удар). То есть в данном случае, при движении по прямой, действие не будет ни максимальным, ни минимальным. Сами прямолинейные участки, однако, являются кратчайшими, поэтому, если быть корректным, реальное действие между точками 1 и 2 все же минимально, но сам путь не определен. Видимо, природа также подвержена демократическому духу времени: она позволяет частице самой выбирать направление движения, раз от этого выбора время движения все равно не зависит.

Но стоит настырному экспериментатору внести небольшое изменение в условия опыта, и вместо описанной идиллии, начинает твориться… ну прямо какая-то чертовщина. Поставим на внутреннюю поверхность эллипса отражатель с большей, нежели у эллипса, кривизной. Тогда при отражении от точки В длина ломаной, а, стало быть, действие, уменьшится! То есть длина ломаной F_1AF_2 минимум для всех линий, соединяющих эти точки, но максимум для всех ломаных, соединяющих отражатель и фокусы эллипса. Это и не минимум, и не максимум, и даже не перегиб, такая штука, вообще-то минимаксом называется. После таких строк, почему-то, чувствуешь себя юным исследователем насекомых, который, из чисто научного, разумеется, интереса отрывает лапки этим прелестным созданиям. Другими словами, изощренно-циничному разуму в очередной раз удалось поиздеваться над беззащитной природой. Ох, знай заранее матушка, на что способно это неблагодарное дитя, удавила бы его в утробе, на стадии питекантропа, примерно.

Ну а если серьезно, то лично меня удивляет не столько принцип наименьшего действия, сколько сами уравнения Лагранжа. За вторым законом Ньютона, за тем тривиальным фактом, что наш мир описывается дифференциальными уравнениями второго порядка, скрывается реальность, значение которой трудно переоценить. Чтобы убедиться, насколько это бытийно важно, стоит попытаться представить мир, в котором силы определяют производные более низкого или, не приведи Господь, более высокого порядка, нежели ускорение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т 1, 2. М. Наука, 1988.
2. Воронков И. М. Курс теоретической механики. М. Наука, 1964.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика. М. Наука, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ